Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Методические указания
по выполнению лабораторной работы по физике
для студентов, обучающихся по техническим (550000)
и технологическим (650000) направлениям

Екатеринбург
УрФУ
2011

УДК 537.2:001.891.57(076)

Составитель: О. Е. Кириллов
Научный редактор – доц. канд. физ.-мат. наук А. Г. Волков

Исследование качения твердого тела по наклонной плоскости : методические указания по выполнению лабораторной работы / сост. О. Е. Кириллов. Екатеринбург : УрФУ, 2011. 13 с.

Изложены теория и практическая часть проведения лабораторной работы по исследованию качения твердого тела по наклонной плоскости.

Библиогр.: 2 назв. Рис. 2. Табл. 3. Прил. 1.

Подготовлено кафедрой физики.

© УрФУ, 2011

ВВЕДЕНИЕ

При скатывании тело, опускаясь с высоты $h_o = l_o \sin\alpha_1 \cong l_o\alpha_1$, проходит путь l_o, а поднимаясь по инерции на высоту $h = l\sin\alpha_2 \cong l\alpha_2$, проходит путь l. В нижней точке скорость поступательного движения центра масс $v = 2l_o / t$, а угловая скорость тела

$$\omega = v / r = 2l_o / (r \cdot t), \tag{1}$$

где t – время движения от верхней точки до нижней; r – радиус стержня (оси).

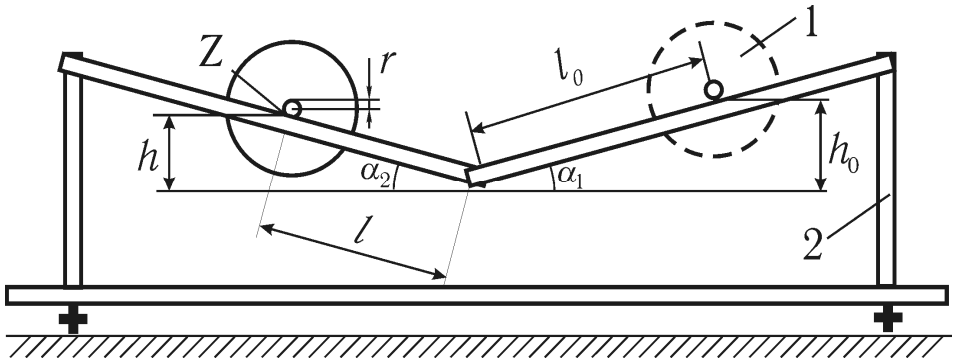

Рис. 1

На скатывающееся тело действует момент сил трения качения $M_{тр}$. Работа его на пути l_o равна $A = -M_{тр}\varphi$, где угловой путь $\varphi_o = l_o/r$.

Закон изменения кинетической энергии на отрезке пути l_o имеет вид

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgh_o - M_{тр}\varphi, \tag{2}$$

где I – момент инерции скатывающегося тела относительно МЦС (мгновенный центр скоростей − точка касания оси и плоскости); m – масса скатывающегося тела.

При движении тела вниз с высоты h_o и вкатывании его на высоту h работа сил сопротивления на пути $(l + l_o)$ равна изменению потенциальной энергии:

$$-M_{тр}\frac{l_o + l}{r} = mgh - mgh_0. \tag{3}$$

Решая совместно (1–3), получаем формулу для определения момента инерции динамическим методом:

$$I = \frac{mglr^2(\alpha_1 + \alpha_2)\,t^2}{2l_o(l_o + l)}. \qquad (4)$$

Здесь величина $(\alpha_1 + \alpha_2)$ является константой для данной установки.

Момент инерции тела относительно МЦС связан с моментом инерции относительно центра масс теоремой Штейнера:

$$I = I_o + ma^2, \qquad (5)$$

где I_o – момент инерции, относительно центра масс; a – расстояние от центра масс тела до оси вращения (в этом опыте $a = r$).

$$I_o = I - mr^2. \qquad (6)$$

Момент сил трения качения определяется как

$$M_{тр} = fN, \qquad (7)$$

где f – коэффициент трения качения; N – нормальная реакция опоры наклонной плоскости. *Коэффициент трения качения − размерная величина, она имеет размерность длины, то есть плеча силы реакции опоры,* которую принято измерять в сантиметрах.

Момент сил трения качения $M_{тр}$ можно найти из (3), заметив, что углы α_1 и α_2 с очень большой точностью равны, то есть получим

$$M_{тр} = \frac{mgr(l_0 - l)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(l_o + l)}. \qquad (8)$$

Далее из (7) можно узнать коэффициент трения качения, учитывая, что $N = mg\cos\alpha_1 \cong mg$:

$$f = \frac{r(l_0 - l)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(l_o + l)}. \qquad (9)$$

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В работе используются тела, осью которых является цилиндрический стержень радиусом r. Одно из тел 1 (рис. 1) помещают на параллельные направляющие 2, образующие с горизонтом углы α_1 и α_2.

Если тело отпустить, то оно, скатываясь, достигнет нижней точ-

ки и, двигаясь далее по инерции, поднимется вверх по направляющим. Движение тела, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, называется *плоским*. Плоское движение можно представить двумя способами: либо как совокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс; либо как только вращательное движение вокруг точки мгновенного центра скоростей (МЦС), положение которой непрерывно изменяется. В нашем случае эта мгновенная ось Z проходит через точки касания направляющих с катящимся стержнем.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

З а д а н и е 1 . Определение момента инерции тела динамическим методом.

З а д а н и е 2. Аналитический расчет момента инерции тела.

З а д а н и е 3. Измерение коэффициента трения качения.

З а д а н и е 4 . Изучение зависимости момента инерции от распределения массы относительно оси вращения.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Запишите средства измерений и их характеристики.

З а д а н и е 1 . Определение момента инерции тела динамическим методом.

1. Определите массу m тела, запишите ее значение, а также постоянную установки ($\alpha_1 + \alpha_2$).
2. Проверьте правильность положения установки. При скатывании тело не должно смещаться к одной из направляющих. Для регулировки используйте винты основания. Измерьте штангенциркулем диаметр d стержня в различных местах (как минимум в четырех – два слева, два справа) – табл. 1.
3. Установите тело на направляющие на расстоянии l_o от нижней точки − его положение фиксируется магнитом при нажатии красной кнопки на самой установке.
4. Нажмите кнопку секундомера *Пуск*. При этом электромагнит отключится и тело начинает двигаться. Когда тело достигнет нижней точки, секундомер автоматически выключится. Запишите время движения тела до нижней точки в табл. 2.

5. Наблюдая далее за движением тела по инерции, отметьте расстояние l, на которое оно поднимется до остановки.
6. Опыт повторите еще N раз (задает преподаватель) при том же расстоянии l_o, записывая результаты в табл. 2.

З а д а н и е 2. Аналитический расчёт момента инерции тела.
Для расчёта момента инерции маховика I необходимо измерить массы тел (написаны на телах), радиусы цилиндрических тел и размеры пластины. Методика расчета величины I основана на аддитивности момента инерции, то есть общий момент инерции тела равен сумме моментов инерции составляющих его тел.

З а д а н и е 3. Измерение коэффициента трения качения.
Все необходимые данные для этого задания получены в Задании 1.

З а д а н и е 4. Изучение зависимости момента инерции от распределения массы относительно оси вращения.

В этом задании используется тело в виде крестовины, по которой могут перемещаться грузы (цилиндры). Все результаты измерений заносятся в табл. 3.

1. Определите массу m тела и радиус r оси тела, и запишите постоянную установки $(\alpha_1 + \alpha_2)$.
2. Установите подвижные цилиндры на равном расстоянии b от оси вращения и измерьте это расстояние.

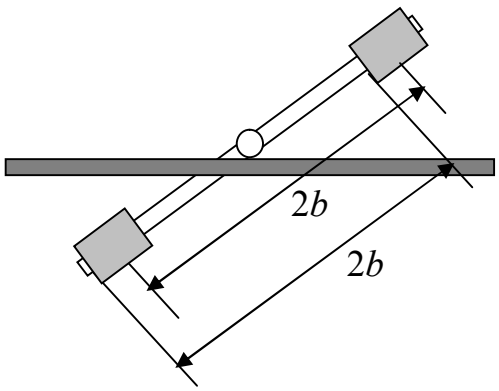

Рис. 2

Примечания.

1. Когда грузы находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, тело должно находиться в безразличном положении равновесия на горизонтальных направляющих.
2. Так как цилиндры имеют одинаковый размер, расстояние между центрами грузов равно расстоянию между их торцами, которое можно измерить значительно точнее и проще (рис. 2) .
3. Установите тело на направляющие на расстоянии l_o от нижней точки, его положение фиксируется маг-

нитом нажатием красной кнопки на самой установке.

4. Нажмите кнопку секундомера *Пуск*. При этом электромагнит отключится и тело начинает двигаться. Когда тело достигнет нижней точки, секундомер автоматически выключится. Запишите время движения тела до нижней точки в табл. 3.
5. Отметьте расстояние l, на которое продвинется тело, поднимаясь по инерции.
6. Повторите измерения пп. 3−5 при других расстояниях b цилиндров относительно оси вращения.

Методика обработки измерений

З а д а н и е 1 . Определение момента инерции тела динамическим методом.

1. Используя данные табл. 2 по формуле (4) рассчитайте момент инерции тела I относительно МЦС, а по (6) момент инерции I_0 относительно центр масс.
2. Рассчитайте случайные, систематические и полные погрешности.

З а д а н и е 3. Измерение коэффициента трения качения.

1. По результатам табл. 1 и Задания 1 рассчитайте по (8) $M_{тр}$, а затем по (9) коэффициент трения качения f.
2. Рассчитайте случайные, систематические и полные погрешности.

З а д а н и е 4 . Изучение зависимости момента инерции от распределения массы относительно оси вращения.

1. Рассчитайте b^2 и момент инерции тела I (формула (4)) для каждого опыта.
2. Зависимость $I_0 = f(b^2)$ линейная, а именно: $I_0 = I_{кр} + mb^2$. Таким образом, если обозначить $Y = I_0$, $X = b^2$, то, используя метод наименьших квадратов (см. ПРИЛОЖЕНИЕ), можно найти $I_{кр}$ и m. Постройте график зависимости $I = f(b^2)$, рассчитанной по методу наименьших квадратов, и нанесите на него экспериментальные точки.

По всем вопросам обращайтесь к лаборанту или преподавателю.

Рекомендуемая форма отчета

Титульный лист

УрФУ
КАФЕДРА ФИЗИКИ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе
Исследование качения твердого тела
по наклонной плоскости

Студент(ка) _____.

Группа _____.

Дата _____.

На внутренних страницах:

1. Цель работы.

Исследование качения твердого тела по наклонной плоскости. Определение момента инерции катящегося тела. Определение коэффициента трения качения. Подтверждение теоремы Штейнера.

2. Расчетные формулы.

$$I = \frac{mglr^2(\alpha_1 + \alpha_2)\,t^2}{2l_o(l_o + l)}; \qquad I_o = I - mr^2; \qquad f = \frac{r(l_0 - l)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(l_o + l)}$$

3. Принципиальная схема установки:

4. Средства измерений и их характеристики.
Электронный секундомер: цена деления c =
Измерительная линейка (вдоль накл. плоск.): цена деления c =
Штангенциркуль: класс точности δ = ; цена деления c =

5. Результаты измерений и их обработка.

Задания 1 и 3.

$\alpha_1 + \alpha_2 = ...$ рад; $m = ...$ кг; $l_o = ...$ м.

Измерение диаметра оси

Таблица 1

п/п	d_i	$<d> - d_i$	$(<d> - d_i)^2$

$<d>=$……. мм $\sum_{i=1}^{n}(d_i - <d>)^2 =$ ……. мм^2

Среднее квадратичное отклонение: $S_{<d>} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - <d>)^2}{n(n-1)}} =$ ….. мм

Граница случайной погрешности:

$$\varepsilon_d = t_{0,95;\,n} S_{<d>} = \ldots \text{ мм.}$$

Граница неисключенной систематической погрешности:

$$\theta_d = \theta_{осн} = ... \text{ мм.}$$

Граница полной погрешности результата измерений диаметра:

$$\Delta d = \sqrt{\varepsilon_d^2 + \theta_d^2} = \ldots\ldots \text{ мм, } p = 0{,}95.$$

Результат измерений диаметра:

$$d = <d> \pm \Delta d = (\ \ldots \pm \ldots) \text{ мм, } p = 0{,}95.$$

Результат измерений радиуса

$$r = (<d> \pm \Delta d)/2 = <r> \pm \Delta r = (\ \ldots \pm \ldots) \text{ мм, } p = 0{,}95.$$

$N = \ldots$ Таблица 2

п/п	t, с	l, м	I, *кг м*^{2}	$M_{тр}$, *Н м*
1 … N				
Среднее значение	$<t>=$	$<l>=$	$<I>=$	$<M_{тр}>=$

Среднее квадратичное отклонение измерения l : $S_{<l>}=\ldots$.

Граница случайной погрешности измерения l : $\varepsilon l = ...$, $p = 0{,}95$.

Граница полной погрешности измерения l:

$$\Delta l = \sqrt{(\varepsilon l)^2 + \theta_{осн}^2} = \ldots\ldots, \quad p = 0{,}95.$$

Среднее квадратичное отклонение измерения t: $S_{<t>} = \ldots$.
Граница случайной погрешности измерения t: $\varepsilon_t = \ldots$, $p = 0{,}95$.
Граница полной погрешности измерения t:

$$\Delta t = \sqrt{(\varepsilon_t)^2 + \theta_{осн}^2} = \ldots \ , \ p = 0{,}95.$$

Оценка относительной погрешности результата измерения (косвенного) момента инерции:

$$\delta I = \frac{\Delta I}{< I >} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta r}{< r >}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta t}{< t >}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{< l >}\right)^2}$$

$$\delta I = \ldots \ , \ p = 0{,}95.$$

Оценка абсолютной погрешности результата измерения момента инерции:

$$\Delta I = \delta I < I > = \ldots \ \text{кг·м}^2.$$

Момент инерции относительно центра масс

$$< I_0 > = < I > - mr^2 = \ldots \ \text{кг·м}^2.$$

Результат измерения момента инерции относительно центра масс:

$$I_0 = < I_0 > \pm \Delta I = \ldots . \pm \ldots .. \ \text{кг м}^2, \ p = 0{,}95.$$

Оценка относительной погрешности результата измерения (косвенного) момента сил трения:

$$\delta M_{тр} = \frac{\Delta M_{тр}}{< M_{тр} >} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{< r >}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{< l >}\right)^2}$$

$$\delta M_{тр} = \ldots \ , \ p = 0{,}95.$$

Оценка абсолютной погрешности результата измерения момента сил трения:

$$\Delta M_{тр} = \delta M_{тр} < M_{тр} > = \ldots \ \text{Н·м}.$$

Результат измерения момента сил трения:

$$M_{тр} = < M_{тр} > \pm \Delta M_{тр} = \ldots . \pm \ldots .. \ \text{Н·м}, \ p = 0{,}95.$$

Коэффициент трения качения

$$f = \frac{M_{тр}}{mg} = \frac{< M_{тр} >}{mg} \pm \frac{\Delta M_{тр}}{mg} = \ldots . \pm \ldots .. \text{м}, \ p = 0{,}95.$$

$$f = \ldots \pm \ldots \ \text{см}, \ p = 0{,}95.$$

Задание 2.
Размеры тел, составляющих данное тело:
Момент инерции:

Задание 4.

Таблица 3

п/п	b, м	t, с	l, м	b^2	I	I_0
1						
2						
3						
4						

Момент инерции крестовины $I_{КР}$ = ….. ± ……

Масса подвижного груза (цилиндра) m = …..±……

График зависимости $I = f(b^2)$ прилагается к отчету.

7. Выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите характер движения тела по направляющим. Какая сила создает момент относительно оси вращения?
2. Как измеряют угловую скорость ω в данной работе?
3. Какие величины измеряют для определения скорости ω, момента сил трения, работы сил трения?
4. Какие уравнения лежат в основе динамических методов определения момента инерции?
5. Что составляет основу методики расчетного метода определения величины I?
6. Укажите возможные источники случайных и систематических погрешностей при измерениях.

---

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. I. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. − М. : Наука, 1982. − 280 с.
2. Механика и молекулярная физика : учебное пособие к выполнению лабораторных работ / В.К. Герасимов, С.Н. Клыков, С.И. Морозов [и др.]; под ред. А.Е. Гришкевича. – Челябинск : ЮУрГУ, 2005. – 95 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Предположим, что проведены измерения некоторой зависимости $Y_i(X_i)$. Причем известно, что теоретически зависимость этих параметров линейная, то есть имеет вид: $Y = kX + b$. Тогда метод наименьших квадратов дает следующие выражения для наиболее вероятных значений k и b:

$$k_o = \frac{<XY> - <X><Y>}{<X^2> - <X>^2}, \qquad b_o = <Y> - k_o <X>.$$

Среднеквадратичные отклонения для величин k и b:

$$s_k = \frac{S_{\min}}{\sqrt{n\left(<X^2> - <X>^2\right)}}, \qquad s_b = S_{\min}\sqrt{\frac{1}{n}\left(n + 1 + \frac{<X>^2}{<X^2> - <X>^2}\right)},$$

где $\quad S_{\min}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - k_o x_i - b_o)^2$

и погрешности: $\quad \Delta k = S_k t_{p;n-1}; \quad \Delta b = S_b t_{p;n-1}$

Таким образом, окончательный результат

$$k = k_0 \pm \Delta k, \quad b = b_0 \pm \Delta b, \; p = \ldots.$$

Коэффициент (линейной) корреляции вычисляется по формуле

$$R_{XY} = \frac{<XY> - <X><Y>}{\sqrt{\left(<X^2> - <X>^2\right)\left(<Y^2> - <Y>^2\right)}},$$

n – количество точек.

Значения коэффициентов Стьюдента

для доверительной вероятности $p = 0{,}95$ для n измерений

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$p = 0{,}95$	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	1,96

Учебное издание

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Составитель: **Кириллов** Олег Евгеньевич

Редактор *Н.В. Рощина*

Компьютерный набор *авторский*

Подписано в печать 28.02.2011. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 0,75.
Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
rio@mail.ustu.ru

Ризография НИЧ УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19