Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б.Н.Ельцина»

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Методические указания
по выполнению лабораторных работ по физике
для студентов, обучающихся по техническим (550000)
и технологическим (650000) направлениям

филиал УрФУ

Верхняя Салда

2019

УДК 537.2:001.891.57(076)

Составители: А. В. Аминев, О. Е. Кириллов

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ : методические указания по выполнению лабораторных работ / сост.: А. В. Аминев, О. Е. Кириллов. Екатеринбург : УрФУ, 2019. 29 с.

В данных методических указаниях изложены методы обработки и представления результатов физического эксперимента применительно к лабораторному практикуму по общей физике.

Рис. 4, Табл. 2, Библ. 5 назв.

Подготовлено кафедрой физики.

Содержание

1. Введение

Несмотря на то, что физика чрезвычайно математизирована, в основе своей физика наука опытная. Это означает, что физическое исследование начинается с опыта, наблюдения и, в конечном счете, возвращается к наблюдениям. Математика лишь систематизирует, классифицирует, предоставляет эффективные методы оперирования результатами наблюдений, позволяет лаконично и строго сформулировать теории и гипотезы, которые все же требуют экспериментального подтверждения.

Наблюдения, связанные с физическим опытом сопровождаются измерениями. Причем опыт должен быть проведен так, чтобы он мог быть повторен другими наблюдателями в любое время и в любом месте. Опыт, проведенный в искусственно созданных условиях (лабораториях) называют **экспериментом**.

Целью эксперимента является поиск или подтверждение закономерной связи между какими-либо явлениями. На основе обработки и анализа результатов измерений выделяются основные закономерности, которым придается общая математическая форма и называемые **физическими законами.**

Накопленный в результате ряда экспериментов материал требует для себя физического объяснения, для чего создается соответствующая гипотеза.

Гипотеза, обнимающая значительный круг явлений, облеченная в строгую математическую форму и подтвержденная экспериментально в своих выводах (основных или всех), называется **теорией**.

2. Классификация измерений

Измерение физической величины состоит в сравнении ее с другой, принятой за единицу, называемой эталоном. Результаты измерений выражаются в основных или производных единицах, принятых по общему, международному соглашению.

Физические методы, с помощью которых получают результаты измерений, разделяются на: метод непосредственной оценки, метод последовательного сравнения, нулевой метод.

Метод непосредственной оценки дает значение измеряемой величины путем непосредственного отсчета по прибору. Например, величины электрического тока и напряжения считывают со шкалы (или табло) амперметра или вольтметра.

Метод последовательного сравнения можно еще назвать как метод косвенной оценки. В этом методе вместо двух искомых величин берут две пропорциональные им другие величины, измерить которые проще или надежнее. Например, при измерении отношения сопротивлений двух проводников одинакового сечения часто проще и удобнее измерить отношение длин этих проводников.

При **нулевом методе** действие измеряемой величины компенсируется влиянием подобной же величины, но действующей в противоположном направлении. Измерения, результат которых непосредственно дает искомую величину, называют **прямыми**. Прямыми измерениями будут, например, измерения длины тела масштабной линейкой или его массы техническими весами (с целью определения длины или массы).

Косвенным называется такое измерение, где искомая величина требует для своего определения каких-либо математических операций над результатами прямых измерений. Примером может служить определение плотности твердого тела, когда с помощью весов измеряют массу тела (прямое измерение), с помощью метода вытеснения жидкости измеряют объем (прямое измерение) и разделив массу тела на его объем получают плотность (косвенное измерение). Есть прибор, позволяющий непосредственно измерять плотность жидкостей - ареометр. С помощью него можно измерить плотность прямым методом.

3. Погрешности измерений

При всяком измерении неизбежны погрешности, не дающие возможности измерить какую-либо величину абсолютно точно. Эти погрешности определяются с одной стороны измерительными приборами - их недостатками, несовершенствами и естественными пределами чувствительности, с другой стороны несовершенством метода измерений, неполнотой наших знаний или практической невозможностью учесть все факторы, сопутствующие данному явлению. *Важно понимать, что физика - точная наука не потому, что ее измерения абсолютно точны, а потому, что в каждом случае она может указать пределы, внутри которых заключается измеряемая величина.* Чем совершеннее измерительный прибор и методика измерений, тем более узки эти пределы, определяющие собой величину погрешности измерений.

Погрешности по виду представления разделяются на абсолютные и относительные.

Абсолютная погрешность - число, имеющее размерность измеряемого физического параметра и равное половине ширины интервала, внутри которого находится истинное значение измеряемой величины. Например, фраза: “средняя длина стержня равна 2 метра при абсолютной погрешности 0,01 м” означает, что при повторных измерениях длины того же стержня, тем же самым измерительным прибором длина его может оказаться в интервале от 1,99 м до 2,01 м. Короче это записывается так: $L = 2 \pm 0{,}01$ м или L=2,00(1) мм.

В принципе, абсолютная погрешность полностью характеризует измерение, но иногда используется **относительная погрешность** - безразмерное число, равное отношению абсолютной погрешности к среднему результату измерений. В последнем примере относительная погрешность составляет 0,005. Иначе говоря, относительная погрешность - это погрешность по отношению к средней величине. Иногда ее измеряют в процентах - для этого ее необходимо умножить на 100 (в примере, приведенном выше, относительная погрешность в процентах составит 0,5%).

По своей природе или по характеру проявления погрешности измерения делятся на систематические, случайные и промахи.

К **систематическим погрешностям** относятся такие, которые обязаны своим происхождением действию регулярных, неизменных по своей величине и направлению факторов. Как правило, систематические погрешности вызваны неточностью экспериментальной установки - пределом чувствительности приборов, их несовершенством, искажениями или незначительными неисправностями. В основном систематическая погрешность вносится прибором, из-за чего ее иногда называют приборной. Величина систематической погрешности практически не зависит от количества измерений. Из-за этого эту погрешность иногда называют неустранимой погрешностью. Единственный метод заметно уменьшить систематическую погрешность - усовершенствование измерительного прибора, повышение его чувствительности.

К **случайным** погрешностям относятся такие погрешности, которые не могут быть предугаданы ни по величине, ни по направлению в силу неупорядоченности совокупного действия некоторых (неизвестных) факторов. Например, воздушные течения, пылинки, садящиеся на призмы микровесов и слетающие с них, могут отразиться на результатах взвешивания. Нужно подчеркнуть, что те же факторы оставят результат более грубого взвешивания (на менее точных весах) неизменным. Это означает, что в данном случае абсолютная величина погрешности уже больше погрешности измерительного прибора. Таким образом, *появление случайных погрешностей является признаком использования достаточно чувствительного прибора.*

Случайные погрешности не могут, в целом, быть выражены каким-либо определенным физическим законом в силу сложности, сопутствующей всем неупорядоченным явлениям. Однако, причинная связь явлений сохраняется и здесь, и случайные погрешности подчиняются определенным статистическим закономерностям.

Перечислим **основные свойства случайных погрешностей**:

1). Случайные погрешности, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, равновероятны (встречаются одинаково часто).

2). Чем больше по абсолютной величине случайная погрешность измерения, тем меньше ее вероятность, то есть тем реже она встречается.

3). При измерении какой-либо физической величины среднее арифметическое из случайных погрешностей неограниченно стремится к нулю с увеличением числа измерений.

К **промахам** относятся ошибки, возникающие в результате небрежности отсчета по приборам или неразборчивости в записи их показаний. Единственное средство устранить их - это внимательно сделать повторное измерение.

4. Оценка погрешности прямых измерений

Полная погрешность серии прямых измерений одной и той же величины в одних и тех же условиях одним и тем же прибором складывается из систематической погрешности и случайной. Можно сказать, что *систематическая погрешность обусловлена измерительным прибором, а случайная процессом измерения.*

4.1. Оценка случайной погрешности

Пусть в результате ряда измерений физической величины X получены значения x_1 , x_2 ,..., x_n , где n - число измерений. Если X_o - истинное значение измеряемой величины, то разность $\Delta x'_n$ между ним и измеренным значением x_n называется **истинной погрешностью**. Пусть

$$\begin{aligned} X_0 - x_1 &= \Delta x'_1 \ , \\ X_0 - x_2 &= \Delta x'_2 \ , \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_0 - x_n &= \Delta x'_n \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Сложим эти равенства почленно, тогда

$$X_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta x'_i}{n} ,$$

где $\Delta x'_i$, в силу свойства 1**,** могут быть как положительными, так и отрицательными числами и в соответствии со свойством 3

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x'_n = 0 .$$

Тогда

$$X_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum x_i}{n} = X_{cp\infty} ,$$

то есть среднее арифметическое из результатов бесконечного количества отдельных измерений $X_{cp\infty}$ в точности равнялось бы истинному значению измеряемой величины X_o .

Практически n всегда конечно, но, как показывает теория, X_{cp} остается вероятнейшим значением измеряемой величины X. Часто ее обозначают <X> или $\overline{X}$, то есть

$$< X > \equiv \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{2}$$

Соотношения (1) теперь представятся в виде

$$\begin{aligned} < X > - x_1 &= \Delta x_1 , \\ < X > - x_2 &= \Delta x_2 , \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ < X > - x_n &= \Delta x_n , \end{aligned}$$

где погрешности Δx_i будут уже несколько отличаться от истинных. Погрешности Δx_i, определенные как разности между измеренными значениями физической величины X и их средним арифметическим называются **вероятнейшими** или **остаточными**. Первой величиной, которую приходится вычислять в процессе обработки прямых измерений является (2), - оценка истинного значения измеряемой величины, то есть среднее арифметическое из n равноточных измерений, определяемое выражением (2).

Итак, для того чтобы определить истинное значение измеряемой физической величины X, необходимо провести бесконечное число ее наблюдений и найти среднее арифметическое полученных результатов. Это невыполнимая задача. В любом реальном эксперименте число наблюдений конечно, поэтому среднее арифметическое их результатов отличается от истинного значения. *Задача исследователя - оценить для данной совокупности наблюдений возможные отклонения среднего арифметического* <X> *от истинного* X_o . Это делается с применением математического аппарата теории вероятностей.

Как уже отмечалось, при проведении большой серии наблюдений некоторой величины X чаще всего встречаются результаты, довольно близкие к ее истинному значению. Чем больше случайное значение x_i отличается от истинного, тем реже оно встречается. Выделим среди возможных результатов наблюдений некоторый интервал Δx. Пусть из n проведенных наблюдений Δn дали результаты, лежащие в этом интервале. Вероятность попадания результата наблюдения x_i в интервал Δx определяется выражением

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta n}{n} .$$

Если данная величина X непрерывна, то существует отличная от нуля вероятность dP попадания результата отдельного наблюдения в любой элементарный интервал dx. Эта вероятность в общем случае зависит от ширины интервала dx и от того, в окрестности какого значения x выбран этот интервал, то есть

$$dP=f(x)dx .$$

Функция f(x) называется **плотностью вероятности** или **плотностью функции распределения** случайной величины X.

Часто при измерениях физических величин распределение результатов наблюдений подчиняется так называемому **нормальному**, или **гауссову закону**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - X_0)^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Параметр σ^2 называется **дисперсией распределения**, а σ - **средним квадратичным отклонением**. Этот параметр характеризует разброс значений измеряемой величины относительно ее истинного значения X_0 : чем больше σ, тем больше этот разброс.

В теории вероятностей доказывается, что если будет проведена бесконечно большая серия наблюдений величины X и, если результаты будут распределены по нормальному (гауссову) закону, то вероятность того, что результат x_i каждого отдельного наблюдения попадает в интервал значений от $X_0-\sigma$ до $X_0+\sigma$ (или того, что случайная погрешность не превысит значения σ), равна P=0,6827. Вероятности попадания результатов наблюдений в более широкие интервалы $X_0 \pm 2\sigma$ и $X_0 \pm 3\sigma$ равны соответственно 0,9545 и 0,9975. Иначе говоря, случайные погрешности в этих случаях, с вероятностями 0,9545 и 0,9975 не превышают значений 2σ и 3σ.

Вероятность попадания результатов наблюдений в заданный интервал значений называется **доверительной вероятностью**, сам интервал - **доверительным интервалом**, границы погрешностей - **доверительными границами погрешностей**. Так, в первом из рассмотренных примеров доверительный интервал равен $X_O \pm \sigma$, доверительная вероятность P=0,6827.

Для нахождения σ необходимо провести бесконечно большое число наблюдений и построить f(x). В реальных условиях число наблюдений конечно, поэтому можно найти лишь приближенную оценку σ. Эта оценка называется **выборочным средним квадратичным отклонением S_x** результата отдельного наблюдения и вычисляется по формуле

$$S_X = \sqrt{\frac{(x_1 - < X >)^2 + (x_2 - < X >)^2 + ... + (x_n - < X >)^2}{n-1}} \; ,$$

где <X> - среднее арифметическое значение величины X для данной выборки (конечной серии) наблюдений.

Таким образом, проведя конечную серию наблюдений и определив среднее квадратичное отклонение, можно для любого из результатов наблюдений указать с определенной вероятностью доверительный интервал значений и доверительные границы случайной погрешности. Однако обычно важнее оценить границы случайной погрешности не результата каждого отдельного измерения, а их среднего арифметического <X>, которое принято называть результатом измерения физической величины X. Среднее арифметическое <X> также является случайной величиной. Согласно одной из теорем теории вероятностей, если провести большое число серий измерений какой-нибудь физической величины X, то независимо от того, как распределена X в отдельной серии, ее средние арифметические будут подчинены нормальному закону распределения. В этом случае отклонение среднего арифметического <X> от истинного значения X_0 характеризуется не величиной S_x, а меньшей величиной $S_{<x>}$, называемой **средним квадратичным отклонением среднего арифметического** (от истинного значения)

$$S_{<X>} = \frac{S_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - <X>)^2 + (x_2 - <X>)^2 + ... + (x_n - <X>)^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (3)$$

Определив для данной серии наблюдений <X> и $S_{<x>}$ можно записать окончательный результат в виде $X = <X> \pm 2S_{<X>}$, P=0,95 , то есть с вероятностью P=0,95 найденное значение <X> не отличается от истинного значения X_0 более чем на $2S_{<x>}$ (в обе стороны).

Различие между $S_{<x>}$ и $\sigma_{<x>}$ невелико, а распределение результатов измерений мало отличается от нормального только при достаточно больших значениях n (n>30). В учебных лабораториях, как правило, ограничиваются небольшим числом наблюдений (3-5). В этом случае $S_{<x>}$ и $\sigma_{<x>}$ различаются сильно, поэтому для правильной оценки доверительных границ случайной погрешности вместо целочисленных коэффициентов при $S_{<x>}$ вводятся превышающие их дробные коэффициенты Стьюдента.

Оперируя методами теории вероятностей, английский математик Госсет в вышедшей в 1908 г. под псевдонимом "Стьюдент" работе показал, что в случае небольшого числа наблюдений доверительная граница ε_x случайной погрешности среднего арифметического оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = t_{p,n} S_{<x>}\ , \qquad (4)$$

где $t_{p,n}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от принятой доверительной вероятности P и числа наблюдений n; $S_{<x>}$ - среднее квадратичное отклонение среднего арифметического. Значение коэффициентов Стьюдента для доверительных вероятностей p=0,99; p=0,95; p=0,68 для n измерений приведены в таблице

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
P=0,99	63,7	9.92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	2,58
P=0,95	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	1,96
P=0,68	1,82	1,31	1,19	1,13	1,10	1,08	1,07	1,06	1,05	0,99

Заметьте, что при $n \to \infty$ $t_{0.95;n} \to 1.96 \approx 2$

4.2. Оценка систематической погрешности

В некоторых случаях модуль и знак систематической погрешности известны. Такая погрешность должна быть исключена путем введения соответствующей поправки. Так, например, если время наступления некоторого события фиксируется визуально, то необходимо сделать поправку на реакцию человека, составляющую около 0,2 сек; иначе говоря, у нормального человека между моментом когда он увидел событие и моментом когда нажал кнопку секундомера проходит некоторое время, называемое реакцией и составляющее около 0,2 сек.

Однако имеются такие систематические погрешности, модуль и знак которых неизвестны. Такие ошибки называют неисключенными и должны быть учтены.

В паспорте измерительного средства (прибора), как правило, указывается **предел основной погрешности** $\theta_{осн}$ (кратко - основная погрешность), то есть погрешность, которая может возникнуть при использовании этого средства в нормальных условиях. Например, если в паспорте микрометра указано, что предел основной погрешности составляет 0,004 мм (иногда пишут $\pm 0{,}004$ мм), то это означает, что при измерении линейных размеров какого-либо тела без нарушения правил измерения и в нормальных условиях основная систематическая погрешность измерения не превысит 0,004 мм.

Часто предел основной погрешности средства измерения задается классом точности. **Класс точности** δ средства измерения показывает, сколько процентов от его верхнего предела измерения X_{max} (размер шкалы) составляет предел основной погрешности этого средства

$$\delta = \frac{\theta_{осн}}{X_{\max}} \cdot 100\% \qquad (5)$$

Электроизмерительные приборы могут иметь следующие классы точности: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Класс точности прибора обычно указывается на его шкале.

Предел основной погрешности $\theta_{осн}$ прибора одинаков во всем его диапазоне измерений, но возможная относительная погрешность зависит от показания прибора. Например, если миллиамперметром с пределом измерения I_{max}=100 мА измерена сила тока I=20 мА и класс точности миллиамперметра δ=1,0 , то предел основной погрешности составляет $\theta_{осн}$=1мА, а относительная основная погрешность измерения не превышает $\gamma = \theta_{осн} / I = 0{,}05 = 5\%$. Но если измеренный ток составляет I=10 мА, то нетрудно посчитать, что относительная основная погрешность составит 10%. Отсюда следует **важное правило измерения**: *при измерении необходимо пользоваться как можно большей частью шкалы,* - нежелательно измерять в начале шкалы (следует переключиться на меньший предел, если это возможно).

Наряду с основной погрешностью средства измерения в систематическую погрешность входит также **погрешность считывания или отсчета** $\theta_{отсч}$, равная половине цены наименьшего деления шкалы, если отсчет показаний ведется с точностью до целых делений. Для приборов, имеющих цифровое табло $\theta_{отсч}$ равно единице последнего разряда, числа индицируемого на табло.

В общем случае у систематической погрешности имеется несколько составляющих. Кроме отмеченных уже основной погрешности и погрешности отсчета имеется погрешность метода и погрешности вызванные другими регулярными источниками ошибок. При оценке доверительной границы неисключенной систематической погрешности θ_x при n=1 следует учитывать основную погрешность средства измерения $\theta_{осн}$ и погрешность отсчитывания $\theta_{отсч}$. Тогда, для оценки полной систематической погрешности θ_x согласно теории вероятностей, при P=0,95 используется формула

$$\theta_X = \sqrt{\theta_{осн}^2 + \theta_{отсч}^2}\ . \qquad (6)$$

В случае n>1 имеет смысл учитывать только $\theta_{осн}$ (погрешность отсчета в этом случае фактически учитывается в случайной погрешности), то есть

$$\theta_X = \theta_{осн}.$$

Погрешность метода в лабораторных работах обычно не учитывается, если о ней особо ничего не сказано в описании к лабораторной работе.

4.3. Оценка полной погрешности

После того, как определены доверительные границы случайной и систематической погрешностей, необходимо оценить границы полной погрешности результата измерений. Для этого, прежде всего, сравнивают доверительную границу θ_x систематической погрешности и доверительную границу ε_x случайной погрешности результата измерений.

1. В случае, если $\frac{\theta_X}{\varepsilon_x} < 0{,}1$, систематической погрешностью по сравнению со случайной пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta X = \varepsilon_x$.

2. Если $\frac{\theta_X}{\varepsilon_x} > 10$, то случайной погрешностью по сравнению с систематической пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta X = \theta_x$.

3. Если же оказалось, что $0{,}1 < \frac{\theta_X}{\varepsilon_x} < 10$, то необходимо учитывать обе составляющие погрешности результата измерения. В этом случае доверительную границу погрешности результата оценивают по формуле

$$\Delta X = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \theta_X^2}\ . \qquad (7)$$

После того, как граница погрешности результата измерений Δ_x определена, окончательный результат записывают в виде:

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X\ , \quad P=0{,}95\ .$$

Величины $\langle X \rangle$ и ΔX должны быть *согласованы по точности*: они должны содержать последнюю значащую цифру в одном и том же разряде. Если, например, $\langle X \rangle = 64{,}538$ мм и $\Delta X = 0{,}028$ мм, то необходимо округлить ΔX до первой значащей цифры: $\Delta X = 0{,}03$ мм, а затем и $\langle X \rangle$ округлить до цифры того же десятичного разряда, которым выражена погрешность: $\langle X \rangle = 64{,}54$мм. Окончательный результат измерения записывают в виде:

$$X = (64{,}54 \pm 0{,}03) \text{ мм}, \quad P=0{,}95$$

<u>и читается так:</u> *с вероятностью P=0,95 истинное значение измеренной величина X находится в интервале от 64,51 мм до 64,57 мм.*
Иногда пишут так

$$X=64{,}54(3) \text{ мм}, \ p=0{,}95$$

5. Оценка погрешности косвенного измерения

При косвенном измерении значение искомой величины Y находят по результатам прямых измерений величин $X_1, X_2, \ldots, X_m$, которые связаны с Y известной функциональной зависимостью

$$Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_m) \tag{8}$$

Проведя серии прямых измерений величин $X_1, X_2, \ldots, X_m$, можно найти их оценки, то есть средние арифметические $<X_1>, <X_2>, \ldots, <X_m>$ и доверительные границы погрешностей результатов их измерений $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta X_m$. Наиболее вероятным значением Y следует считать $<Y>$, которое получается, если в формулу (8) подставить средние значения аргументов:

$$<Y>=f(<X_1>, <X_2>, \ldots, <X_m>) \,. \tag{9}$$

Теория вероятностей показывает, что когда погрешности измеряемых аргументов не зависят друг от друга, то доверительная граница относительной погрешности δY измерения величины Y оценивается по формуле

$$\delta Y = \frac{\Delta Y}{<Y>} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\Delta X_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\Delta X_2}{f}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\frac{\Delta X_m}{f}\right)^2} \,, \tag{10}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial f}{\partial X_1}\dfrac{1}{f}$ - частная производная по X_1 от lnf, формуле (10) можно придать вид:

$$\delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2} \,. \tag{11}$$

Для нахождения границы абсолютной погрешности результата измерения величины Y нужно δY умножить на $<Y>$:

$$\Delta Y=\delta Y<Y> \,. \tag{12}$$

Естественно, границы всех аргументов X_i должны соответствовать одной и той же доверительной вероятности Р=0,95. Тогда и граница погрешности косвенного измерения величины Y также будет соответствовать этой же доверительной вероятности.

Окончательный результат косвенного измерения записывается в виде

$$Y = \langle Y \rangle \pm \Delta Y \ , \quad P=0{,}95.$$

Запись означает: истинное значение Y_0 с вероятностью Р=0,95 заключено в пределах интервала от $\langle Y\rangle - \Delta Y$ до $\langle Y\rangle + \Delta Y$.

Ниже приводится таблица вычисления погрешностей косвенного измерения для некоторых простейших функций f(X, Y), в которой ΔX, ΔY – абсолютные погрешности параметров X и Y, δX, δY – относительные погрешности.

Функция f(X,Y) или f(X)	Абсолютная погрешность.	Относительная погрешность.
$C \cdot X$	$\lvert C\rvert \cdot \Delta X$	δX
$X \pm Y$	$\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$	$\sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2}$
$X \cdot Y$	$\lvert X\rvert \cdot \Delta Y + \lvert Y\rvert \cdot \Delta X$	$\sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2}$
X^a	$\lvert a\rvert \cdot \lvert X\rvert^{a-1} \cdot \Delta X$	$\lvert a\rvert \cdot \delta X$
$\frac{C}{X}$	$\frac{\lvert C\rvert}{X^2}\Delta X$	δX
$\frac{X}{Y}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta X}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\lvert X\rvert \cdot \Delta Y}{Y^2}\right)^2}$	$\sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2}$
e^X	$e^X \Delta X$	$X \cdot \delta X$

6. Исследование функциональных зависимостей

Все вышеизложенное относится к обработке измерений одной или нескольких физических величин в одних и тех же условиях. Однако гораздо чаще необходимо экспериментально выявить или доказать некоторую зависимость одной физической величины от другой. При этом возникают два вопроса. Первый, – каков вид зависимости? Второй – если установлен вид зависимости, то каковы параметры этой зависимости и какова вероятность, что зависимость именно такая?

Ответ на первый вопрос, как правило, известен заранее – из теоретических соображений. Второй вопрос разрешается вычислением коэффициента корреляции.

Например, чтобы доказать справедливость закона Ома необходимо задать несколько значений напряжения U_i и измерить получающиеся при этом токи I_i. Причем, в общем случае и напряжение задается с некоторой погрешностью ΔU и ток измеряется с некоторой погрешностью ΔI, - методы расчета этих погрешностей приведены выше (п.п. 2-5). Если изобразить графически точки (U_i, I_i) то нетрудно догадаться, что они расположатся вблизи прямой линии теоретической зависимости I(U), определяемой законом Ома: I=U/R (рис. 1).

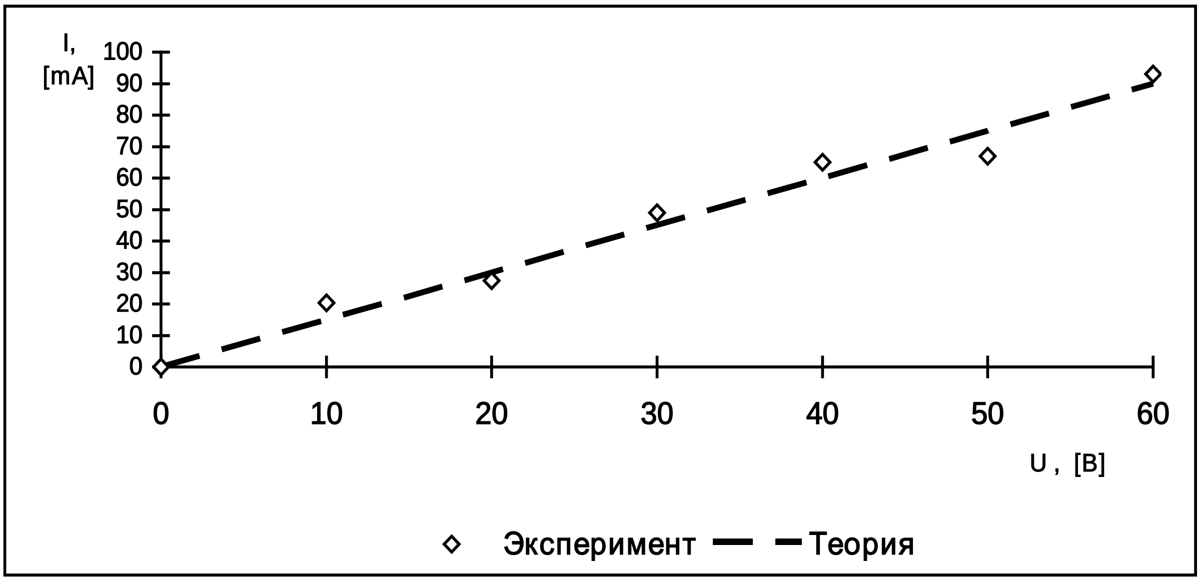

Рис. 1

Через экспериментальные точки можно с помощью линейки провести линию. Но как провести линию, которая проходила бы на минимальном расстоянии от всех экспериментальных точек сразу? Имеется метод расчета параметров этой линии, а ее называют **прямой выравнивания**, это **метод наименьших квадратов.**

Итак, предположим, что проведены измерения некоторой зависимости $Y_i(X_i)$. (Если проводились неоднократные измерения при каждом X_i, то необходимо рассматривать зависимость $<Y>_i(<X>_i)$, что не сказывается на дальнейших выводах). Причем известно, что теоретически зависимость этих параметров линейная, то есть имеет вид

$$Y=kX+b\ .$$

Примем, для простоты, что независимая переменная X устанавливается без ошибок (или, по крайней мере, что $\Delta X<<\Delta Y$). Величины k и b определены согласно гауссову закону, с помощью которого находится минимум суммы квадратичных ошибок (отсюда и название метода). Исходное выражение имеет вид

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b)^2\ . \qquad (14)$$

Частное дифференцирование по k и b дает

$$\frac{\partial S}{\partial k}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-kx_i-b),$$
$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i-b).$$

Приравнивая обе производные нулю, получаем уравнения

$$k\sum_{i=1}^{n}x_i^2+nb<X>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\,,$$
$$k<X>+b=<Y>,$$

из которых следуют выражения для наиболее вероятных значений k и b

$$k_o=\frac{<XY>-<X><Y>}{<X^2>-<X>^2}, \qquad b_o=<Y>-k_o<X>.$$

В математической статистике (теории вероятностей) величину

$$DX = <X^2> - <X>^2$$

называют дисперсией, тогда выражения для наиболее вероятных значений k и b

$$k_o = \frac{<XY> - <X><Y>}{DX}, \qquad b_o = <Y> - k_o <X>. \tag{15}$$

Без дальнейших вычислений укажем величину среднеквадратического отклонения для величин k и b. Если

$$S_{\min} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_o X_i - b_o)^2}$$

то

$$s_k = \frac{S_{\min}}{\sqrt{n \cdot DX}}, \quad s_b = S_{\min}\sqrt{\frac{1}{n}\left(n + 1 + \frac{<X>^2}{DX}\right)} \tag{16}$$

и погрешности

$$\Delta k = S_k t_{p;n-1}; \quad \Delta b = S_b t_{p;n-1} \tag{17}$$

Таким образом, окончательный результат

$$k = k_0 \pm \Delta k, \quad b = b_0 \pm \Delta b, \text{ p=}\ldots$$

Коэффициент (линейной) корреляции – количественная характеристика близости экспериментальных точек к прямой линии. Модуль коэффициента корреляции равен вероятности того, что между экспериментальными точками существует линейная зависимость. Вычисляется по формуле

$$R_{XY} = \frac{<XY> - <X><Y>}{\sqrt{DX \cdot DY}}, \tag{18}$$

Если R_{xy}=1, то между точками существует строгая линейная зависимость, причем возрастающая; тоже и при R_{xy}=-1, но зависимость убывающая. Если коэффициент корреляции таков, что

$$\left|R_{xy}\right| > p\,,$$

где p – доверительная вероятность, то экспериментальные точки удовлетворяют предполагаемой линейной зависимости с вероятностью p.

Алгоритм применения ***метода наименьших квадратов***: вычисляем последовательно следующие параметры

$$< X >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,; \qquad < Y >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\,;$$

$$< X^2 >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\,; \qquad < Y^2 >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\,; \qquad < XY >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\,;$$

далее вычисляем DX, k, b, S_k, S_b, Δk, Δb, DY, R_{xy} по формулам (15-18).

7. Представление результатов

7.1. Основные этапы обработки результатов измерений

1. Для каждой из непосредственно измеренных величин вычислить:
а). среднее арифметическое <X>;
б). среднее квадратичное отклонение $S_{<X>}$;
в). доверительную границу случайной погрешности ε_x;
г). доверительную границу систематической погрешности θ_x;
д). доверительную границу полной погрешности ΔX.
2. Записать результат каждого прямого измерения в виде

$$X =< X > \pm \Delta X\,, \quad P=0,95\,.$$

3. Вычислить наиболее вероятное значение результата косвенного измерения <Y>.
4. Получить (если она не дается в руководстве к лабораторной работе) выражение для относительной погрешности δY косвенного измерения и найти ее числовое значение.
5. Вычислить доверительную границу абсолютной погрешности ΔY результата косвенного измерения.
6. Записать окончательный результат косвенного измерения в виде

$$Y =< Y > \pm \Delta Y\,, \quad P=0,95\,.$$

7. Если исследуется линейная функциональная зависимость, то, используя метод наименьших квадратов, определяются параметры этой линейной зависимости, погрешности и вычисляется коэффициент корреляции.

7.2. Рекомендуемая примерная форма отчета

Титульный лист:

УрФУ
КАФЕДРА ФИЗИКИ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе

Название работы

Студент(ка) _________________.

Группа _____________________.

Дата _______________________.

На внутренних страницах:

1. Цель работы

2. Расчетные формулы для косвенно измеряемых величин

3. Средства измерений и их характеристики
/ Наименование средства измерения, предел измерений, цена деления шкалы (для цифрового прибора - единица последнего разряда), класс точности или предел основной погрешности и прочие характеристики/.

4. Эскиз установки /схема электрической цепи/.

5. Результаты прямых измерений /протокол измерений/.

6. Обработка результатов прямых измерений.
/Вычисление средних значений, случайных погрешностей, систематических погрешностей, полных погрешностей/.

7. Обработка результатов косвенно измеряемых величин.
/Вычисление средних значений и погрешностей/.

8. Окончательный результат.

9. Выводы.

7.3. Графическое представление результатов измерений

В ряде случаев для наглядного представления результатов пользуются графическим методом. Использование графического метода имеет смысл при исследовании некоторой функциональной зависимости одной физической величины от другой (или нескольких). Например, зависимость силы тока в проводнике (полупроводнике) от приложенного напряжения, зависимость длины стержня от температуры, зависимость скорости звука от температуры. Преимущество графического метода в наглядности и непосредственной очевидности качественных свойств зависимости. Глядя на график, сразу же видно монотонная зависимость или нет, если монотонная то какая - возрастающая, убывающая, линейная и т.д., если же не монотонная, то где максимум или минимум, точка перегиба и прочее. В инженерной практике очень часто используются **номограммы** - это графическое представление нескольких функциональных зависимостей на одном графике для различных значений какого-либо параметра.

Следует особо отметить, что график математической функции и график, представляющий результаты измерений - это два совершенно различных понятия. График математической функции состоит из бесконечного числа **математических точек**, местоположение которых (координаты) можно узнать со сколь угодно высокой точностью. Иначе говоря, график математической функции - непрерывная линия. Результаты измерений, во-первых, не абсолютно точны, а имеют вполне определенную погрешность и, во-вторых, их не бесконечно много, а всегда конечное число. Следовательно, результаты измерений представляются на графике в виде “размытых”, отдельно расположенных **экспериментальных точек**, - их даже нельзя назвать точками - это точки со своими окрестностями размером с погрешность. Из этого следует, что бессмысленно соединять эти “точки” какой-либо непрерывной линией, да это и невозможно (это не точки!). Другое дело, что эти “точки” должны были попасть на некоторую теоретическую кривую, - ее изобразить можно, хотя маловероятно, что экспериментальные точки попадут на теоретическую кривую - и это нормально! (более того - неприлично, когда экспериментальные точки четко ложатся на теоретическую кривую, - это попахивает фальсификацией).

Теперь несколько замечаний о технике графического представления результатов измерений. Крайне желательно, чтобы график был нанесен на миллиметровой бумаге, - тогда из него можно извлечь много сведений. Оси координат, экспериментальные точки, теоретические кривые и прочие линии необходимо наносить карандашом четко, без помарок и, где это необходимо, с помощью линейки или лекала. Экспериментальные точки наносятся либо крестиком, либо какой-нибудь геометрической фигурой - круг, квадрат, ромб и т.д. Крестиком наносят тогда, когда погрешность экспериментальной точки одного порядка с масштабом оси. В этом случае вертикальный размер крестика равен погрешности того параметра, который соответствует оси ординат, а горизонтальный равен погрешности параметра, соответствующего оси абсцисс. Если погрешность экспериментальной точки много меньше масштаба осей, тогда она наносится в виде простейшей геометрической фигуры. Надписи, - наименование осей и единицы их измерения, разметка осей (масштаб), комментарии, - можно наносить шариковой или чернильной ручкой, желательно черным цветом и уж конечно предельно аккуратно. Не следует наносить на оси координат метки, соответствующие наносимым точкам и уж тем более наносить пунктирные линии до этих точек, - это загромождает график и плохо смотрится! Масштаб осей и начало осей координат выбирается с тем, чтобы график был максимально большой. Удобно для масштаба пользоваться множителями или производными единицами, - сантиметр, миллиампер, киловольт и т.д. При построении графиков желательно выбрать такие комбинации (функции) параметров, чтобы теоретическая зависимость была линейной (прямая линия).

Например, пусть имеются результаты измерения сопротивления терморезистора в зависимости от температуры. Причем теоретически известно, что сопротивление экспоненциально зависит от обратной абсолютной температуры: $R = R_0 e^{A/T}$. Тогда будет нагляднее представить на графике зависимость lnR от 1/T - теоретически это прямая линия: lnR = $\ln R_o$ +(1/T)A. Итак, имеем следующие данные для нанесения на график

lnR	4,13	4,32	4,12	4,63	4,32	4,51	4,83	4,71	4,82	5,2	5,01
$(1/T)10^3$	2,86	2,9	2,94	2,98	3,02	3,06	3,1	3,14	3,18	3,22	3,26

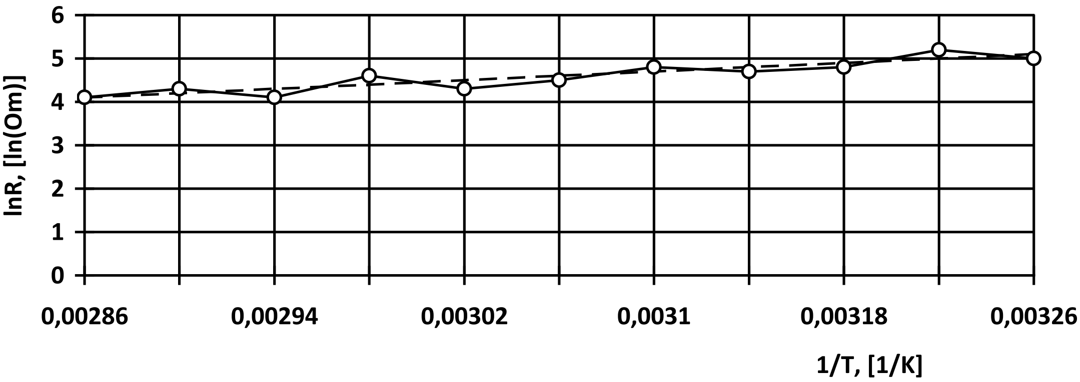

Рис. 2. Пример того, **как не следует** наносить экспериментальные данные.

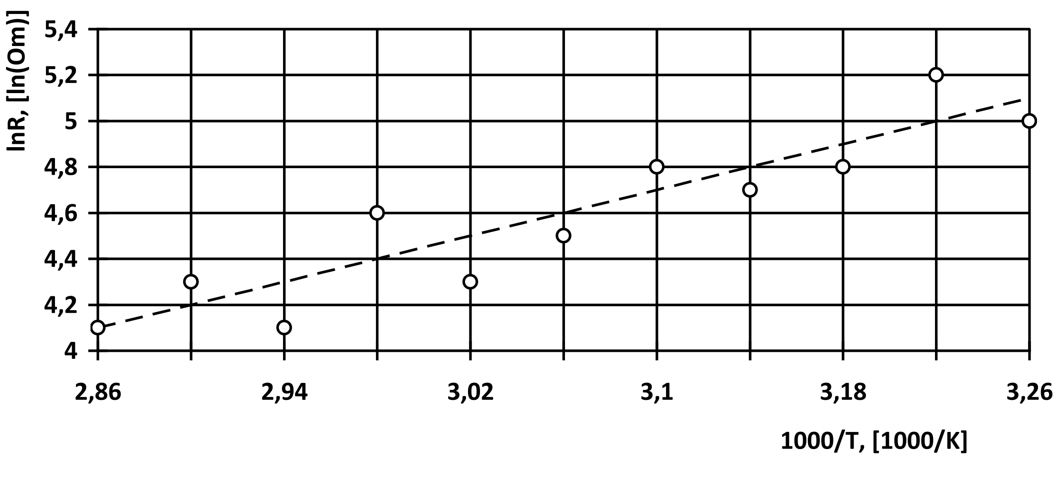

Рис. 3. Пример правильного выбора масштаба и начала осей для экспериментальных данных.

8. Основные формулы обработки результатов измерений

1. **Среднее арифметическое** серии наблюдений <X> является вероятнейшим значением измеряемой величины X

$$< X >= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

2. **Выборочное среднее квадратичное отклонение S_x** результата отдельного наблюдения и вычисляется по формуле

$$S_X = \sqrt{\frac{(x_1 - < X >)^2 + (x_2 - < X >)^2 + ... + (x_n - < X >)^2}{n-1}} \ ,$$

где <X> - среднее арифметическое значение величины X для данной выборки (конечной серии) наблюдений.

3. **Среднее квадратичное отклонение среднего арифметического**

$$S_{<X>} = \frac{S_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - < X >)^2 + (x_2 - < X >)^2 + ... + (x_n - < X >)^2}{n(n-1)}} \ ,$$

4. **Доверительная граница** ε_x случайной погрешности среднего арифметического оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = t_{p,n} S_{<x>} \ ,$$

где $t_{p,n}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от принятой доверительной вероятности P и числа наблюдений n; $S_{<x>}$ - среднее квадратическое отклонение среднего арифметического.

5. **Класс точности** δ средства измерения показывает, сколько процентов от его верхнего предела измерения X_{max} (размер шкалы) составляет предел основной погрешности этого средства

$$\delta = \frac{\theta_{осн}}{X_{\max}} \cdot 100\%$$

6. **Погрешность считывания или отсчета** $\theta_{отсч}$, равна половине цены наименьшего деления шкалы, если отсчет показаний ведется с точностью

до целых делений. Для приборов, имеющих цифровое табло $\theta_{отсч}$ равно единице последнего разряда, числа индицируемого на табло.

7. **Доверительная граница** неисключенной систематической погрешности результата измерения оценивается по формулам

$$n=1:\ \theta_X = \sqrt{\theta_{осн}^2 + \theta_{отс}^2}; \qquad n>1:\ \theta_X = \theta_{осн}.$$

8. **Доверительная граница полной погрешности** результата измерений оценивается в зависимости от соотношения между доверительной границей θ_x систематической погрешности и доверительной границей ε_x случайной погрешности результата измерений следующим образом

а) если $\frac{\theta_X}{\varepsilon_x} < 0{,}1$, то систематической погрешностью по сравнению со случайной пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата

$$\Delta X=\varepsilon_x.$$

б) если $\frac{\theta_X}{\varepsilon_x} > 10$, то случайной погрешностью по сравнению с систематической пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата

$$\Delta X=\theta_x.$$

в) если $0{,}1 < \frac{\theta_X}{\varepsilon_x} < 10$, то необходимо учитывать обе составляющие погрешности результата измерения. В этом случае доверительную границу погрешности результата оценивают по формуле

$$\Delta X = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \theta_X^2}\ .$$

9. **Доверительная граница** относительной погрешности δY косвенного измерения величины $Y=f(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ оценивается по формуле

$$\delta Y = \frac{\Delta Y}{<Y>} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\Delta X_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\Delta X_2}{f}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\frac{\Delta X_m}{f}\right)^2}\ ,$$

или $$\delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}\ .$$

Для нахождения границы абсолютной погрешности результата косвенного измерения величины Y нужно δY умножить на <Y>:

$$\Delta Y = \delta Y \langle Y \rangle .$$

10. **Метод наименьших квадратов**. Метод применяется, если известно, что теоретическая зависимость параметров Y(X) линейная, то есть имеет вид

$$Y = kX + b .$$

Обозначим наиболее вероятные значения k и b, как k_o, b_o , тогда

$$k_o = \frac{<XY> - <X><Y>}{DX}, \qquad b_o = <Y> - k_o <X>,$$

среднеквадратичные отклонения для величин k и b

$$s_k = \frac{S_{\min}}{\sqrt{n \cdot DX}}, \qquad s_b = S_{\min}\sqrt{\frac{1}{n}\left(n + 1 + \frac{<X>^2}{DX}\right)},$$

где $S_{\min} = \sqrt{\dfrac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - k_o x_i - b_o)^2}$, $\quad DX = <X^2> - <X>^2$

и погрешности

$$\Delta k = S_k t_{p;n-1}; \qquad \Delta b = S_b t_{p;n-1}$$

Таким образом, окончательный результат

$$k = k_0 \pm \Delta k, \qquad b = b_0 \pm \Delta b, \ \text{p=}\dots.$$

Коэффициент (линейной) корреляции вычисляется по формуле

$$R_{XY} = \frac{<XY> - <X><Y>}{\sqrt{DX \cdot DY}},$$

где $DY = <Y^2> - <Y>^2$

Литература

1. Математическая обработка результатов измерений в лаборатории физического практикума: Учебно-методическая разработка. – Свердловск: изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1987. – 29с.
2. Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М.: Мир, 1980.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. 2000.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Методические указания к лабораторным работам по физике

Составили:

зав. лабораторией физики Аминев Александр Валерьевич

к.т.н., Кириллов Олег Евгеньевич,