Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИЗУЧЕНИЕ
ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Методические указания
по выполнению лабораторной работы по физике
для студентов, обучающихся по техническим (550000)
и технологическим (650000) направлениям

Екатеринбург
УрФУ
2011

УДК 537.2:001.891.57(076)

Составитель: О. Е. Кириллов
Научный редактор – доц. канд. физ.-мат. наук А. Г. Волков

Изучение законов вращательного движения : методические указания по выполнению лабораторной работы / сост. О. Е. Кириллов. Екатеринбург : УрФУ, 2010. 15 с.

Изложены теория и практическая часть проведения лабораторной работы по изучению законов вращательного движения.

Библиогр.: 2 назв. Рис. 1. Табл. 4. Прил. 1.

Подготовлено кафедрой физики.

© УрФУ, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси имеет вид

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \tag{1}$$

где $\vec{M}$ − суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения;

I − момент инерции тела относительно этой же оси;

$\vec{\varepsilon}$ − угловое ускорение тела.

Момент силы $\vec{F}$, действующей на тело, относительно оси вращения определяется по формуле

$$M = F_1 h, \tag{2}$$

где F_1 − проекция силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную к оси вращения; h − плечо силы, то есть кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы $\vec{F}$.

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения равен произведению массы m точки на квадрат расстояния до этой оси:

$$I = mr^2. \tag{3}$$

Вычисление момента инерции твердого тела относительно оси проводится по формуле

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv,$$

где dm и dV − масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси вращения; ρ − плотность тела в точке элемента dV.

Если тело однородно, то есть его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$I = \rho \int r^2 dv. \tag{4}$$

Момент инерции твердого тела зависит от распределения массы твердого тела относительно оси вращения и является величиной аддитивной. Он определяет инертность твердого тела при вращении.

Существует связь между моментом инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс I_C, и моментом инерции I_Z относительно оси, параллельной первой оси, − теорема Штейнера:

$$I_Z = I_C + mL^2,$$

где L – расстояние между осями.

Вычисление момента инерции твердого тела произвольной формы относительно некоторой оси вращения представляет собой довольно громоздкую в математическом отношении задачу. Экспериментально его можно определить различными методами. Один из таких методов рассматривается в настоящей лабораторной работе.

Уравнение (1) динамики вращательного движения в проекциях на ось вращения (обычно OZ) имеет вид

$$M - M_{\text{тр}} = I\varepsilon, \tag{5}$$

где M − момент силы натяжения T нити; $M_{\text{тр}}$ − момент сил трения, действующих на реальную ось вращения со стороны подшипников. Момент силы натяжения T нити равен

$$M = rT. \tag{6}$$

В этой формуле r − плечо силы T, равное радиусу шкива, на который намотана нить. Силу натяжения T нити найдем из II закона Ньютона для опускающегося груза, записанного в проекциях на ось OY (направленную по движению груза):

$$T = m(g - a), \tag{7}$$

где a − ускорение груза; g − ускорение свободного падения; m − масса опускающегося груза.

Так как действующие на тела системы силы можно считать постоянными, вращение шкива маятника и поступательное движение опускающегося груза можно считать равноускоренным и, следовательно, ускорение a опускающегося груза можно найти из уравнения пути для равноускоренного движения $h = at^2/2$, если измерено время t опускания груза с высоты h:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), а затем (7) в (6), получим $M = rm\left(g - 2h/t^2\right)$. Выражая радиус r шкива через его диаметр d, имеем

$$M = \frac{dm}{2}\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) \tag{9}$$

Модуль углового ускорения вращающейся системы связан с модулем a тангенциального ускорения внешних точек шкива соотношением $\varepsilon = 2a/d$. Следовательно, применяя (8), получим

$$\varepsilon = \frac{4h}{dt^2}. \tag{10}$$

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Основной частью установки является крестообразный маятник, который может вращаться с малым трением вокруг оси О (рис. 1 – крестовина на рисунке развернута для наглядности; реально она вращается в горизонтальной плоскости). По стержням крестовины могут перемещаться подвижные цилиндры 3 массой $m_г$. На одной оси с крестовиной насажены шкивы 1 и 2 разного диаметра. К концу нити, намотанной на один из шкивов и перекинутой через невесомый блок 4, прикрепляется груз 5 массой m, приводящий маятник во вращательное движение. Время прохождения грузом расстояния h измеряют секундомером. Маятник в исходном положении удерживается электромагнитом, при нажатии клавиши "Пуск" секундомера элек-

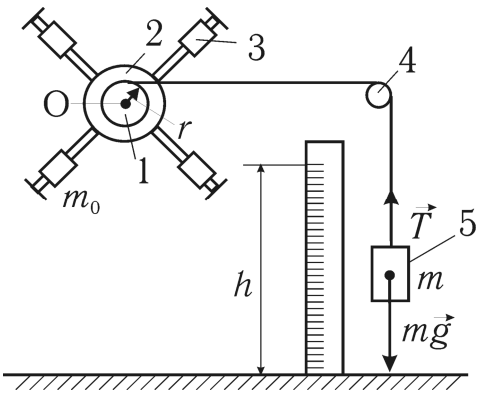

Рис. 1

тромагнит отключается, груз начинает двигаться и одновременно включается секундомер. Счет времени заканчивается при достижении грузом нижнего положения. Для того чтобы секундомер сработал, необходимо установке с помощью винтов в основании платформы придать такое положение, при котором груз опускался бы точно в отмеченный круг. В этот круг вмонтирован датчик, выключающий секундомер.

Расстояние h отмечается по линейке, установленной в верхней части установки, на которой указывается расстояние груза в начальном положении от основания установки.

Если оставлять неизменным момент инерции I_Z крестовины, а менять момент M силы натяжения нити, изменяя массу опускающегося груза, тогда в соответствии с (5) должна выполняться следующая зависимость:

$$M = M_{тр} + I_Z \varepsilon . \qquad (11)$$

Момент сил трения $M_{тр}$, вообще говоря, изменяется при изменении массы опускающегося груза, так как с увеличением нагрузки на ось шкива возрастают реакции подшипников, а значит, и силы трения, действующие на ось. Условия проведения опытов в нашем случае таковы, что момент сил трения $M_{тр}$ можно считать приблизительно постоянным: $M_{тр} \approx \text{const}$.

Изменяя положение грузов $m_г$ на стержнях крестовины, можно менять ее момент инерции в соответствии с теоремой Штейнера.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Цель: Изучение вращательного движения твердого тела.

Задача 1. Проверка основного закона динамики вращательного движения. Определение момента инерции крестовины с грузами. Определение момента сил трения $M_{тр}$.

Задача 2. Проверка теоремы Штейнера. Определение момента инерции крестовины без грузов и массы грузов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Запишите в табл. 1 характеристики используемых измерительных приборов.

Задача 1

1. Измерьте массу грузов: m_o – платформы, m_1, m_2 – съемных шайб. Установите центры подвижных цилиндров $m_г$ на одинаковом расстоянии L от оси вращения (задает преподаватель) и измерьте диаметры шкивов d_1 – малый и d_2 – большой. Результаты запишите в табл. 2.
2. Прикрепите к нити платформу m_0. Вращая маятник, намотайте нить на малый шкив d_1 в *один слой* и включите электромагнит красной кнопкой, расположенной в верхней части установки. Запишите расстояние h, проходимое грузом при падении (по нижнему обрезу платформы). Убедитесь, что нить и груз во время движения не задевают неподвижные части установки или другие предметы. Устраните качание груза и нажмите кнопку *Пуск* секундомера. Запишите время t движения груза до нижней точки. Еще два раза повторите измерения. Результаты по мере их получения записывайте в табл. 3.
3. С тем же шкивом проведите измерения п. 3 с массами $m = m_0 + m_1$ и $m = m_0 + m_2$.
4. Аналогичные измерения проведите, используя шкив диаметром d_2.

Задача 2

1. Закрепите подвижные цилиндры на максимальном и одинаковом расстоянии L_1 от оси вращения. Прикрепите к нити груз массой m (задает преподаватель). Выберите для эксперимента шкив (задает преподаватель).
2. Вращая маятник, намотайте нить на шкив *в один слой,* запишите h и измерьте время движения t (см. п. 3 задачи 1). Результаты измерений вносите в табл. 4.
3. Повторите п. 2 для всех заданных $L_{2\text{-}7}$.

МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Задача 1

1. Используя результаты табл. 2, вычисляем диаметры шкивов и их погрешности.
2. Используя результаты табл. 3, вычисляем среднее <*h*> и среднее <*t*> для каждого груза и каждого диаметра шкива. Вычисляем значения ε и *M* в каждом опыте по формулам (10, 9).
3. Учитывая, что зависимость (11) линейная, применяем метод наименьших квадратов (см. ПРИЛОЖЕНИЕ) и определяем момент инерции крестовины с грузами I_z и момент сил трения $M_{тр}$.
4. Строим график зависимости $M(\varepsilon)$, вычисленный по методу наименьших квадратов (пунктирной линией), и наносим экспериментальные точки.

Задача 2

Вычисляем для каждого опыта величины L^2 и момент инерции маятника по формуле, полученной с учётом выражений (10), (9):

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = m\frac{d^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right). \qquad (13)$$

Постройте график зависимости момента инерции маятника I от L^2. Сделайте вывод о характере полученной зависимости $I = f(L^2)$ с учётом того, что момент инерции маятника, у которого цилиндры приняты за материальные точки,

$$I = I_{кр} + 4m_г L^2. \qquad (14)$$

Видно, что это линейная зависимость, и применяя метод наименьших квадратов, вычисляем момент инерции крестовины $I_{кр}$, который согласно (14) равен параметру b линейной зависимости $I = f(L^2)$, и массу одного груза $m_г$ на крестовине, который равен $m_г = k/4$, где k – параметр в линейной зависимости $I = f(L^2)$.

По всем вопросам обращайтесь к лаборанту или преподавателю.

Рекомендуемая форма отчета

Титульный лист

УрФУ
КАФЕДРА ФИЗИКИ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе
Изучение законов вращательного движения

Студент(ка) _____.

Группа _____.

Дата _____.

На внутренних страницах:

1. Цель работы
Проверка основного закона вращательного движения и определение момента инерции твердого тела и момента сил трения.
2. Расчетные формулы
Задача 1. Момент силы натяжения нити

$$M = \frac{dm}{2}\left(g - \frac{2h}{t^2}\right), \qquad (1)$$

где <*d*> − средний диаметр шкива; m − масса опускающегося груза; <h> − средняя высота падения груза; <t> − среднее время опускания груза.
Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{4h}{dt^2}. \qquad (2)$$

Задача 2. Момент инерции

$$I = m\frac{d^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right),$$

$$I = I_{кр} + 4m_Г L^2,$$

где $I_{кр}$ – момент инерции крестовины без грузов; $m_Г$ – масса одного груза; L – расстояние груза до оси крестовины.

3. Эскиз установки

4. Средства измерений и их характеристики.

Таблица 1

Наименование средства измерения	Предел измерения	Цена деления шкалы	Класс точности	Предел основной погрешности
Электросекундомер				
Линейка металлич.				
Весы аналитические				
Штангенциркуль				

5. Результаты измерений. Установка №.....

Задача 1

5.1. Массы платформы $m_о$, съемных шайб m_1, m_2 и их погрешности

$m_о$ = ... г ; m_1 = ……..... г ; m_2 = …..... г ;

Δm = ... г.

5.2. Измерение диаметра шкивов.

Таблица 2

d_1, мм	$d_i - <d_1>$, мм	$(d_i - <d_1>)^2$, мм^2	d_2, мм	$d_i - <d_2>$, мм	$(d_i - <d_2>)^2$, мм^2

$<d_1>$ = ... мм. $\sum(d_i - <d_1>)^2 =$ …… мм^2.

$$S_{<d>} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - <d_1>)^2}{n(n-1)}} = ...мм. \qquad \varepsilon_d = t_{p,n} S_{<d>} = ...мм,\ p = 0{,}95.$$

$\theta_{осн}$=…. мм. $\Delta d_1 = \sqrt{\varepsilon_d^2 + \theta_{осн}^2}$ = ... мм.

Результат измерения диаметра d_1:

$$d_1 = < d_1 > \pm \Delta d_1 = (.....\pm.....)\text{мм}, p = 0{,}95.$$

$<d_2>$ = ... мм. $\sum (d_i - < d_2 >)^2 =$…….. мм^2.

$S_{<d>} = \sqrt{\dfrac{\Sigma(d_i - < d_2 >)^2}{n(n-1)}}$ = ... мм. $\varepsilon_d = t_{p,n} S_{<d>}$ = ... мм, p = 0,95.

$\theta_{осн}$ = ….. мм. $\Delta d_2 = \sqrt{\varepsilon_d^2 + \theta_{осн}^2}$ = ...мм.

Результат измерения диаметра d_2:

$$d_2 = < d_2 > \pm \Delta d_2 = (.....\pm.....)\text{мм}, p = 0{,}95.$$

5.3. Измерение времени опускания груза, расчет ε и *M*.

Таблица 3

Диаметры шкивов	d_1 =			d_2 =		
Масса опускающегося груза, г	m_o	$m_o + m_1$	$m_o + m_2$	m_o	$m_o + m_1$	$m_o + m_2$
h, м						
$<h>$, м						
Время t опускания груза, с						
$< t >$, с						
Угловое ускорение ε, рад/с^2						
Момент силы натяжения *M*, Н·м.						

5.4. Расчет I_Z, $M_{ТР}$

Зависимость $M(\varepsilon)$ линейная (см. (5)). Тогда, обозначив $X = \varepsilon$, $Y = M$, $k = I_Z$, $b = -M_{ТР}$, можно применить метод наименьших квадратов (см. ПРИЛОЖ.) и определить

$k = \ldots.$; $\Delta k = \ldots$; $b = \ldots.$; $\Delta b = \ldots$; $R_{XY} = \ldots..$; $p = 0{,}95$.

Тогда $I_z = \ldots \pm \ldots$; $M_{тр} = \ldots \pm \ldots$; $p = 0{,}95$.

График $M(\varepsilon)$ с экспериментальными точками и рассчитанной зависимостью $M(\varepsilon)$ по методу наименьших квадратов прилагается к отчету.

Задача 2

m = …….. г; d = ... мм.

Таблица 4

п/п	h, м	L, м	t, с	L^2, м^2	I, кг м^2
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Зависимость $I(L^2)$ линейная (см. 14), то есть если обозначить $Y = I$, $X = L^2$, $k = 4m_г$, $b = I_{кр}$, то зависимость примет вид $Y = kX + b$ и можно применить метод наименьших квадратов (см. ПРИЛОЖЕНИЕ):

$k_о = \ldots$; $\Delta k = \ldots$; $b_о = \ldots..$; $\Delta b = \ldots..$; $R_{xy} = \ldots..$; $p = 0{,}95$;

$m_г = k_о/4 = \ldots$; $\Delta m_г = \Delta k/4 = \ldots$; $I_{кр} = b_о = \ldots$; $\Delta I_{кр} = \Delta b = \ldots$;

$m_г = \ldots \pm \ldots$ г; $I_{кр} = \ldots \pm \ldots$, $p = 0{,}95$.

График $I(L^2)$ с экспериментальными точками и рассчитанной зависимостью $I(L^2)$ по методу наименьших квадратов прилагается к отчету.

Выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите и поясните основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
2. Что такое момент силы относительно оси вращения?
3. Как определяется момент инерции материальной точки относительно оси вращения? Единица его измерения.
4. Запишите формулу для вычисления момента инерции твердого тела относительно оси вращения.
5. Выведите формулы для расчета момента M силы натяжения нити и углового ускорения ε.
6. Как по графику можно определить момент инерции I_z и момент $M_{тр}$ сил трения?

---

1. Савельев И.В. Курс общей физики. − Т. I. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. − М. : Наука, 1982.

2. Механика и молекулярная физика : учебное пособие к выполнению лабораторных работ / В.К. Герасимов, С.Н. Клыков, С.И. Морозов [и др.]; под ред. А.Е. Гришкевича. – Челябинск : ЮУрГУ, 2005. – 95 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Предположим, что проведены измерения некоторой зависимости $Y_i(X_i)$. Причем известно, что теоретически зависимость этих параметров линейная, то есть имеет вид: $Y = kX + b$. Тогда метод наименьших квадратов дает следующие выражения для наиболее вероятных значений k и b:

$$k_o = \frac{<XY> - <X><Y>}{<X^2> - <X>^2}, \qquad b_o = <Y> - k_o <X>.$$

Среднеквадратичные отклонения для величин k и b:

$$s_k = \frac{S_{\min}}{\sqrt{n\left(<X^2> - <X>^2\right)}}, \qquad s_b = S_{\min}\sqrt{\frac{1}{n}\left(n + 1 + \frac{<X>^2}{<X^2> - <X>^2}\right)},$$

где $\quad S_{\min}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - k_o x_i - b_o)^2$

и погрешности: $\quad \Delta k = S_k t_{p;n-1}; \quad \Delta b = S_b t_{p;n-1}$

Таким образом, окончательный результат

$$k = k_0 \pm \Delta k, \quad b = b_0 \pm \Delta b, \; p = \ldots.$$

Коэффициент (линейной) корреляции вычисляется по формуле

$$R_{XY} = \frac{<XY> - <X><Y>}{\sqrt{\left(<X^2> - <X>^2\right)\left(<Y^2> - <Y>^2\right)}},$$

n – количество точек.

Значения коэффициентов Стьюдента

для доверительной вероятности p = 0,95 для n измерений

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
p = 0,95	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	1,96

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Составитель: **Кириллов** Олег Евгеньевич

Редактор *Н. В. Рощина*

Компьютерный набор *авторский*

Подписано в печать 28.02.2011. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 0,87.
Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
rio@mail.ustu.ru

Ризография НИЧ УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19